# Annotatio quarundam cautelarum in investigatione inaequalitatum quibus corpora coelestia in motu perturbantur observandarum

Leonhard Euler

# ANNOTATIO QVARVNDAM CAVTELARVM IN INVESTIGATIONE INAEQVALITATVM QVIBVS CORPORA COELESTIA IN MOTV PERTVRBANTVR OBSERVANDARVM.

Auctore

*L. EVLERO.*

1.

Omnis perfectio, quae adhuc in Theoria Astronomiae desideratur, in resolutione huius quaestionis continetur, vt trium pluriumue corporum, quae se mutuo in ratione duplicata inuersa distantiarum attrahant, motus definiatur. Cum enim ex motibus Lunae, quos iam satis exacte per Theoriam assignare licuit, vires illae, quibus corpora coelestia in se mutuo agunt, penitus sint confirmatae, nullum superest dubium, quin leues illae anomaliae, quae in motu planetarum tam primariorum quam secundariorum obseruantur, eidem causae sint attribuendae. In Saturno et Ioue ista motus perturbatio adeo nimis est manifesta, quam vt in dubium vocari possit; atque etiam in reliquis planetis, etsi eorum motus regulis *Kepleri* multo magis est

eſt conformis, tamen nonnullae a Tabulis Aſtronomicis aberrationes obſeruantur, quae nulli alii caufae niſi eorum actioni mutuae adſcribi poſſunt. Satellitum autem cum Iouis tum Saturni motum ſimilibus perturbationibus ac lunam eſſe obnoxium, obſeruationes ſatis manifeſto declarant.

2. Quanquam autem in Marte, Terra, Venere et Mercurio tales perturbationes minus ſunt conſpicuae, vt aberrationes a calculo aſtronomico ſolis elementis minus recte conſtitutis tribuendae videantur, tamen eorum motum non penitus Regulis *Keplerianis* eſſe conſentaneum euidentiſſime oſtendi poteſt. Si enim hi Planetae, vti iſtae Regulae a ſummo *Newtono* ſunt expoſitae, vnice ad ſolem ſecundum rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum pellerentur, non ſolum quisque motum ſuum in eodem plano ellipſim deſcribendo perficeret, ſed etiam haec ellipſis omnino foret immutabilis, ſuumque axem perpetuo in eodem ſitu eſſet conſeruatura. Cum igitur tam lineae nodorum, quam abſidum cunctorum planetarum etiam reſpectu ſtellarum fixarum non quieſcant, manifeſtum hinc conſequimur criterium, hos planetas non vnice ſolem verſus impelli, ſed iſta phaenomena aliis cauſis deberi, quarum effectus etiamſi potiſſimum in motu lineae abſidum et nodorum cernatur, tamen dubium eſt nullum, quin inde etiam vel minimae inaequalitates in ipſo earum motu proficiſcantur.

3. Quan-

3. Quantumuis autem Tabulae planetarum inferiorum ac praecipue terrae ad consensum obseruationum accommodatae videantur, tamen saepenumero minutae quaedam aberrationes animaduertuntur, quae tabulas cuiusdam erroris arguunt, in quibus inuestigandis nunc quidem fere omnis Astronomorum industria consumitur, postquam crassiora huius scientiae momenta satis felici cum successu sunt expedita. Verum nullo modo sperare licet, istas leues aberrationes per solas obseruationes vnquam ita in ordinem redigi posse, vt praedici queant, in quo omnis Astronomiae vis versatur; minimi etiam errores, qui in obseruationibus plane euitari nequeunt, tale institutum omnino irritum reddunt, dum semper in dubio relinquunt, quanta pars re vera motum planetarum afficiat. Quemadmodum etiam ad eam accuratam motus Lunae cognitionem qua nunc quidem fruimur, solis obseruationibus innixi nunquam certe peruenturi fuissemus, nisi Theoria in subsidium fuisset vocata.

4. Etsi igitur summum studium, quod Astronomi ad artem obseruandi perficiendam impendunt, imprimis est necessarium, tamen maxima incrementa huius scientiae potissimum a Theoria sunt exspectanda, qua nisi praxis adiuuetur, parum inde commodi ad veram cognitionem motuum coelestium redundare potest. Vniuersa autem Theoria ad problema initio memoratum reducitur, vt motus plurium corporum, quae se mutuo attrahant in ratione

 reci-

reciproca duplicata distantiarum, accurate determinetur. Solutionem vero huius problematis non solum esse difficillimam, sed etiam si in genere tractetur, vires ingenii humani fere superare, omnes qui in eo vires suas exercuerunt, satis superque sunt experti.

5. Si duo tantum essent corpora, quae se mutuo attrahant, quaestio nulli amplius difficultati esset obnoxia, cum vtrumque circa commune centrum grauitatis perfectam ellipsin esset descripturum. Verum statim ac tria considerantur corpora, problema tam fit difficile, vt omnia artificia quae quidem adhuc sunt detecta, ad id perfecte soluendum minime sufficiant. Haud igitur vtilitate cariturum arbitror, si has difficultates, earumque causas accuratius examinauero; quandoquidem illarum enodatio ne sperari quidem poterit, nisi ante diligentissime fuerint perpensae. Quin etiam haec ipsa contemplatio nouos aperiet fontes, ex quibus solutio petenda videtur, qui etsi initio parum adiumenti praebere videantur, tamen vberior meditatio fortasse nos continuo propius ad intentum scopum perducere valebit.

6. Quaestio ergo, quae omnem Astronomiae vim in se complectitur, ad Mechanicam seu motus scientiam refertur, cuius principia iam ita solide sunt constituta, vt eorum applicatio ad casum propositum nulla laboret difficultate; vnde causam tenebra-

nebrarum, in quibus adhuc circa accuratam motuum coelestium cognitionem versamur, minime ignorantiae nostrae in motus scientia tribuere licet. Peruenimus autem non difficulter, quotcunque etiam fuerint corpora se mutuo attrahentia, ad aequationes differentio-differentiales, quae in se omnia motus phaenomena complectuntur, et ad quarum resolutionem totum negotium reducitur. Non igitur difficultas in Mechanica motusque determinatione est sita, sed omnis in Analysi continetur, cuius imperfectioni vnice est imputandum, quidquid adhuc in Theoria Astronomiae desideratur.

7. Forma harum aequationum differentio-differentialium iam satis est nota, ex iis scriptis, quae cum de Luna, tum de perturbatione motus saturni prodierunt, vnde patet motum vniuscuiusque corporis nisi fiat in eodem plano, necessario ternis huiusmodi aequationibus includi: in quibus omnes quantitates variabiles, quae ad singula corpora pertinent, maxime sint inter se permixtae; ita vt nullius corporis seorsim sumti motus definiri queat, quin simul inaequalitates motus omnium reliquorum corporum inuoluantur. Ex quo summa difficultas, qua huiusmodi motuum determinatio impeditur, per se est perspicua, neque vllum remedium extare videtur, nisi vt methodus generalis aperiatur aequationes differentio-differentiales quotcunque, in quibus variabiles vtcunque inter se fuerint permixtae, resoluendi; talis autem methodus nimis ma-

 gna

gna ſcientiae Analyticae incrementa requirit, quam vt ea vnquam ſperare liceat.

8. Tanta ſcilicet impedimenta occurrerent, ſi problema de motu trium pluriumue corporum ſe mutuo attrahentium in genere et perfecte eſſet ſoluendum; pro dato autem caſu plerumque ſe offerunt eiusmodi commoda, quibus illa impedimenta multo redduntur leuiora. Veluti ſi quaeſtio ſit de tribus corporibus, Sole, terra ac Luna, huiusque motus, qualis ex terra ſpectatur, definiri debeat, qua quidem quaeſtione tota Lunae Theoria continetur; primum commode euenit, vt motus ſolis apparens tanquam cognitus ſpectari poſſit, propterea quod perturbationem in motu terrae ab attractione Lunae oriundam pro nihilo reputare licet. Deinde etiam ſolutio non mediocriter inde ſubleuatur, quod diſtantia Lunae prae ſolis diſtantia ſit perquam exigua, ſimulque vis Lunae abſoluta multo ſit minor vi terrae. Tum vero etiam excentricitas orbitae Lunaris non nimis magna, atque inclinatio eius ad planum eclipticae ſatis parua plurimum confert ad difficultates ſuperandas, his autem commodis Tabulae Lunares, quae quidem reliquis praeſtant, acceptae ſunt referendae.

9. His autem ſubſidiis nullus amplius locus relinqueretur, ſi vel Lunae a terra diſtantia eſſet multo maior, vel eius maſſa ſeu vis attractiua abſoluta multo fortior exiſteret, vel ſi orbita eius multo

multo maiorem haberet excentricitatem, vel denique si cum plano eclipticae multo maiorem angulum constitueret: quarum conditionum si vel vna vel plures in Luna deprehenderentur, eius motus hac ratione nullatenus definiri posset, neque eius inaequalitates per simplices angulos, vti in tabulis lunaribus fieri solet, repraesentare liceret. Si talis Luna terrae contigisset, vix patet, quomodo eius motus saltem ita prope cognosci potuisset, vt errores non fuerint vehementer enormes: hoc quippe casu Luna quasi medium quendam statum inter satellitem terrae et planetam primarium esset sortita, spectari deberet.

10. Cum igitur consueta methodus Lunae motum repraesentandi, tabulisque complectendi omni vsu destitueretur, si status Lunae tantillam mutationem accepisset; satis hoc est indicii, solitam motus Lunae repraesentationem naturae non esse conformem. Praeterquam enim quod motum Lunae tantum vero proxime definit, et accurata determinatio innumerabiles huiusmodi inaequalitates requireret, quarum praetermissio quidem in statu, quo Luna reuera versatur, errorem vix notabilem gignit; si alius status Lunae obtigisset, non solum inaequalitatum harum, quae adhuc essent notabiles, numerus in immensum augeri, sed etiam id incommodi facile accedere posset, vt istae infinitae inaequalitates ne seriem quidem conuergentem constituerent, verum continuo fierent maiores; ex quo istius mo-

di repraesentatio motus Lunae omni plane vsu esset caritura.

11. Quo magis autem distantia Lunae a terra augeretur, eo grauiora etiam obstacula motus determinationi aduersarentur; neque tamen ideo aucta distantia continuo multiplicarentur. Nam simulac Luna eousque a terra fuisset remota, vt locum Veneris vel Martis esset occupatura, ista obstacula iterum sed quasi contrario quodam modo euanescerent, dum Luna motum planetae primarii esset secutura, cuius perturbationes, si quae a vi terrae efficerentur, alia plane methodo inuestigari deberent. Haec scilicet inuestigatio similis foret illi, qua perturbationes motus saturni, aliusue planetae primarii, quae ab attractione alius planetae primarii oriuntur indagari solent; quae etsi per similes formulas expeditur, tamen multo dissimili modo instituitur; ibi enim Luna primum circa terram secundum regulas *Kepleri* moueri, assumitur, atque aberrationes ab his regulis quaeruntur; hic vero motus Lunae, quasi circa solem secundum easdem regulas fieret, spectari, et aberrationes ab hoc motu regulari assignari deberent.

12. Quantumuis igitur motus Lunae determinatu sit difficilis, si quidem determinatio ad omnes distantias, in quibus Luna a terra collocari potuisset, patere debeat, tamen dantur quasi duo casus extremi, quibus motus facillime definiri posset,

ſet, quos propterea probe expendi conueniet. Prior ſcilicet caſus, quo determinatio motus Lunae nulla difficultate laboraret, foret, ſi Luna terrae eſſet proxima tum enim ſecundum regulas *Kepleri* circa terram perfectam ellipſin eſſet deſcriptura, cuius alterum focum centrum terrae conſtanter occuparet. Poſterior vero caſus locum haberet, ſi Luna a terra tam longe eſſet remota, vt quaſi in regione Martis vel Veneris verſaretur; tum enim iterum motu regulari eſſet inceſſura et circa ſolem ellipſin deſcriptura, cuius alter focus in centro ſolis exiſteret. Vtroque autem caſu facile foret eius motum non ſolum per calculum definire, ſed etiam ad tabulas reuocare.

13. Hinc igitur colligimus veram motus Lunae, ſi neque terrae ſit proxima, neque ab ea nimis remota, determinationem ita comparatam eſſe debere, vt ambobus memoratis caſibus in determinationes illas ſimplices abeat. Atque hic inſignis defectus in methodo, qua motus Lunae ad certas regulas reuocari ſolet, ſtatim deprehenditur, quippe quae tantum ad alterum caſum extremum, refertur. Ita ſcilicet tantum motum Lunae definit, vt ſi diſtantia Lunae a terra euaneſceret, motus quidem regularis et regulis *Keplerianis* conformis eſſet proditurus; verum ſi Luna in immenſum a terra remoueretur, non ſolum non ad regularitatem illam, qua tum Luna eſſet progreſſura, appropinquaret, ſed potius ab ea in infinitum eſſet digreſſura. Nul-

lum

lum igitur eſt dubium, quin huiusmodi methodus, quae ad vtrumque caſum extremum aeque inclinet, naturae rei multo magis foret conſentanea, atque negotium multo felicius eſſet expeditura.

14. His conſiderationibus etiam problema generale de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium non mediocriter adiuuari videtur. Sint enim propoſita tria corpora A, B, C, quae ſe inuicem in ratione reciproca duplicata attrahant, et quaeratur, vti in Aſtronomia quaeſtio inſtitui ſolet, motus reſpectiuus, quo corpora duo B et C, ſpectatori in A poſito moveri videbuntur; litterae autem A, B, C denotent maſſas horum corporum ſeu eorum vires attractrices abſolutas. Quodſi iam vnum horum corporum euaneſceret, haberetur caſus duorum corporum tantum, quorum motus ſine vlla difficultate definiri poſſet; vnde obtinemus illos caſus extremos, ad quas ſolutionem generalem aeque dirigi oportet. Iſtas igitur extremitates diligentius examinari operae erit pretium, verum ne difficultates nimium obruantur, motum omnium trium corporum in eodem plano fieri aſſumam, quoniam ſi difficultates pro hac hypotheſi eſſent ſuperatae, reliquae ex planorum diuerſitate oriundae haud difficulter vincerentur.

## Problema I.

15. Si tria corpora A, B, C ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, atque

que

que in eodem plano moueantur, definire motum corporum B et C qualis ſpectatori in corpore A poſito apparebit.

## Solutio.

Quoniam corpus A tanquam in quiete perſiſtens conſiderari debet, ex quo motus binorum reliquorum ſpectetur, ducatur in plano motus per A linea recta ♈ A ♎ ad puncta aequinoctialia ſeu alia puncta in coelo fixa, directa; ac tempore quocunque ab epocha quadam elapſo $t$ reperiantur bina reliqua corpora in B et C ad quae ex A ducantur rectae AB et AC. Vocentur ergo hae diſtantiae $AB = x$; $AC = y$; itemque anguli $♈ AB = p$; $♈ AC = q$, qui longitudinem vtriusque corporis referunt; tum ponatur horum angulorum differentia $BAC = q - p = s$, eritque iuncta recta $BC = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. s)} = v$. Iam cum horum corporum maſſae ſint A, B, C, eaque ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, ſequentes habebimus vires acceleratrices: Tab. II. Fig. 1.

I. Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \end{cases}$

II. Corpus C ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv} \end{cases}$

Corpus autem A ſollicitatur a corporibus B et C viribus acceleratricibus ſecundum $AB = \frac{B}{xx}$, ſecundum $AC =$

$AC = \frac{C}{yy}$. Quare cum corpus A debeat in quiete retineri, hae vires secundum directiones contrarias in corpora B et C sunt transferendae. Praeter vires ergo superiores, si ducamus BM et CN parallelas ipsis CA et BA, insuper has habebimus:

I. Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{B}{xx} \\ BM \text{ vi} = \frac{C}{yy} \end{cases}$

II. Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{C}{yy} \\ CN \text{ vi} = \frac{B}{xx} \end{cases}$

Vires ergo quibus haec corpora coniunctim sollicitantur, sunt:

Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A+B}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \\ BM \text{ vi} = \frac{C}{yy} \end{cases}$

Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A+C}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv} \\ CN \text{ vi} = \frac{B}{xx}. \end{cases}$

Quaestio ergo huc redit, quomodo motus corporum ab his viribus sollicitatorum futurus sit comparatus. Hunc in finem ductis ad rectam ♈♎ perpendiculis BP et CQ, illas vires resoluere licet, secundum directiones fixas, quarum alterae $Bb$ et $Cc$ sint ipsi ♈♎ parallelae, alterae vero BP et CQ ad eam normales; ad quod nosse oportet singularum rectarum inclinationes ad axem ♈♎. Ac primo quidem rectae BA et CN

eo

eo inclinantur angulo: $\Upsilon A B = \Upsilon N C = p$; rectae vero $CA$ et $BM$ angulo $\Upsilon A C = \Upsilon M B = q$; verum recta $BC$ ad axem inclinatur angulo $CBb$, cuius sinus est $= \frac{BP - CQ}{v}$ et cosinus $= \frac{AP - AQ}{v}$. Cum iam sit $BP = x \sin. p$; $AP = x \cos. p$; $CQ = y \sin. q$ et $AQ = y \cos. q$ fiet

$$\sin. CBb = \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v} \text{ et } \cos. CBb = \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}.$$

Hinc ergo corpus B sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

| Secundum $Bb$ | secundum $BP$ |
|---|---|
| $\frac{A+B}{xx} \cos. p$ | $\frac{A+B}{xx} \sin. p$ |
| $+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}$ | $+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v}$ |
| $+ \frac{C}{yy} \cos. q$ | $+ \frac{C}{yy} \sin. q.$ |

Porro autem corpus C sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

| Secundum $Cc$ | secundum $CQ$ |
|---|---|
| $\frac{A+C}{yy} \cos. q$ | $\frac{A+C}{yy} \sin. q$ |
| $- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}$ | $- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v}$ |
| $+ \frac{B}{xx} \cos. p$ | $+ \frac{B}{xx} \sin. p.$ |

Ponamus breuitatis gratia has vires:

$$\frac{A+B}{xx} \cos. p + \frac{C(x \cos. p - y \cos. q)}{v^3} + \frac{C}{yy} \cos. q = P$$

$$\frac{A+B}{xx} \sin. p + \frac{C(x \sin. p - y \sin. q)}{v^3} + \frac{C}{yy} \sin. q = Q$$

$$\frac{A+C}{yy} \cos. q - \frac{B(x \cos. p - y \cos. q)}{v^3} + \frac{B}{xx} \cos. p = R$$

$$\frac{A+C}{yy} \sin. q - \frac{B(x \sin. p - y \sin. q)}{v^3} + \frac{B}{xx} \sin. p = S$$

 erit-

eritque ex principiis Mechanicis ſumto elemento temporis $dt$ conſtante:

$$\tfrac{2}{dt^2}dd.\,x\cos.p+\mathrm{P}=0;\quad \tfrac{2}{dt^2}dd.\,x\sin.p+\mathrm{Q}=0$$

$$\tfrac{2}{dt^2}dd.\,y\cos.q+\mathrm{R}=0;\quad \tfrac{2}{dt^2}dd.\,y\sin.q+\mathrm{S}=0$$

Hinc autem per idoneam combinationem elicitur:

$$\mathrm{P}\cos.p+\mathrm{Q}\sin.p+\tfrac{2}{dt^2}(ddx-xdp^2)=0$$

$$\mathrm{Q}\cos.p-\mathrm{P}\sin.p+\tfrac{2}{dt^2}(2dxdp+xddp)=0$$

$$\mathrm{R}\cos.q+\mathrm{S}\sin.q+\tfrac{2}{dt^2}(ddy-ydq^2)=0$$

$$\mathrm{S}\cos.q-\mathrm{R}\sin.q+\tfrac{2}{dt^2}(2dydq+yddq)=0.$$

At ex ſuperioribus formulis fit:

$$\mathrm{P}\cos.p+\mathrm{Q}\sin.p=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{xx}+\frac{\mathrm{C}(x-y\cos.s)}{v^3}+\frac{\mathrm{C}\cos.s}{yy}$$

$$\mathrm{Q}\cos.p-\mathrm{P}\sin.p=\frac{-\mathrm{C}y\sin.s}{v^3}+\frac{\mathrm{C}\sin.s}{yy}$$

$$\mathrm{R}\cos.q+\mathrm{S}\sin.q=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{yy}-\frac{\mathrm{B}(x\cos.s-y)}{v^3}+\frac{\mathrm{B}\cos.s}{xx}$$

$$\mathrm{S}\cos.q-\mathrm{R}\sin.q=\frac{+\mathrm{B}x\sin.s}{v^3}-\frac{\mathrm{B}\sin.s}{xx}$$

vnde pro motu amborum corporum determinando ſequentes quatuor aequationes prodibunt:

$$\text{I.}\quad ddx-xdp^2+\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{xx}+\frac{\mathrm{C}(x-y\cos.s)}{v^3}+\frac{\mathrm{C}\cos.s}{yy}\right)=0$$

$$\text{II.}\quad 2dxdp+xddp+\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{\mathrm{C}\sin.s}{yy}-\frac{\mathrm{C}y\sin.s}{v^3}\right)=0$$

$$\text{III.}\quad ddy-ydq^2+\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{yy}+\frac{\mathrm{B}(y-x\cos.s)}{v^3}+\frac{\mathrm{B}\cos.s}{xx}\right)=0$$

$$\text{IV.}\quad 2dydq+yddq+\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{\mathrm{B}x\sin.s}{v^3}-\frac{\mathrm{B}\sin.s}{xx}\right)=0.$$

Coroll.

## Coroll. 1.

16. Circa has aequationes in genere id tantum annotandum duco quod si prima multiplicetur per $y\,\text{fin.}\,s$; secunda per $\frac{(A+C)x}{C} - y\,\text{cof.}\,s$ tertia per $-x\,\text{fin.}\,s$ et quarta per $\frac{(A+B)y}{B} - x\,\text{cof.}\,s$, summa productorum futura fit:

$$(yddx - xddy)\,\text{fin.}\,s + xy(dq^2 - dp^2)\,\text{fin.}\,s + \frac{A+C}{C}(xxddp + 2xdxdp) + \frac{A+B}{B}(yyddq + 2ydydq) - 2ydxdp\,\text{cof.}\,s - xyddp\,\text{cof.}\,s - 2xdydq\,\text{cof.}\,s - xyddq\,\text{cof.}\,s = 0$$

cuius integrale est:

$$\frac{A+C}{C}xxdp + \frac{A+B}{B}yydq + (ydx - xdy)\,\text{fin.}\,s - xy(dp+dq)\,\text{cof.}\,s = \alpha\,dt.$$

## Coroll. 2.

17. Si haec ad motum Lunae transferre velimus, in A terra constituatur et B pro sole, C vero pro Luna habeatur. Cum autem magnitudo massae Lunae non in computum veniat, siquidem ad perturbationem motus terrae inde oriundam hic non respicimus, facto $C = 0$, has habebimus aequationes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I.}\quad ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A+B}{xx} = 0 \\ \text{II.}\quad 2dxdp + xddp = 0 \end{array}\right\}\ \text{pro motu folis}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{III.}\quad ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{yy} + \frac{B(y - x\,\text{cof.}\,s)}{v^3} + \frac{B\,\text{cof.}\,s}{xx}\right) = 0 \\ \text{IV.}\quad 2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\,\text{fin.}\,s}{v^3} - \frac{B\,\text{fin.}\,s}{xx}\right) = 0 \end{array}\right\}\ \text{pro motu Lunae.}$$

 Coroll.

## Coroll. 3.

18. Motus ergo ſolis ex terra apparens erit regularis ſeu regulis *Keplerianis* conformis. Pro Luna autem alter caſus extremus locum habebit, ſi diſtantiae $x$ et $v$ ſint quaſi infinities maiores quam $y$, ſeu Luna circa terram in minima diſtantia reuolveretur, quo caſu etiam eius motus regulis *Keplerianis* foret conformis, hisque aequationibus contineretur:

$$\text{III. } ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{A}{yy} = 0$$

$$\text{IV. } 2\,dy\,dq + y\,ddq = 0$$

qui caſus etiam ex generalibus formulis naſcitur, ſi maſſa ſolis B vt euaneſcens ſpectetur.

## Coroll. 4.

19. Alter autem caſus extremus obtinebitur, quo Luna veluti planeta primarius circa ſolem revolueretur, ſi maſſa terrae A pro nihilo habeatur; hoc igitur caſu motus Lunae ex terra ſpectatus his aequationibus exprimeretur.

$$\text{III. } ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y - x\,cof.\,s)}{v^3} + \frac{B\,cof.\,s}{xx}\right) = 0$$

$$\text{IV. } 2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B\,x\,fin.\,s}{v^3} - \frac{B\,fin.\,s}{xx}\right) = 0.$$

## Coroll. 5.

20. Etſi autem hoc caſu motus Lunae ſit regularis, tamen reſolutio iſtarum aequationum minus patet;

patet; propterea quod motum ex terra visum definiunt, sicque inaequalitatem secundam, vti ab Astronomis vocatur, simul inuoluunt. Quamobrem harum aequationum resolutio a posteriori est cognita; quae ergo si fuerit expedita, non parum ad resolutionem aequationum generalium collatura esse videtur.

## Coroll. 6.

21. Hoc igitur certum est, resolutionem formularum generalium seu saltem earum, quae §. 17. pro motu Lunae sunt exhibitae, ita comparatam esse debere, vt tam formularum §. 18. quam formularum §. 19. integrationem in se complectatur. Illarum scilicet integratio oriri debet ex generali, si ponatur $B=0$, harum vero si $A=0$, quare vtrumque casum seorsim euoluamus.

## Problema 2.

22. Propositae sint sequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{yy} = 0 \text{ et } 2dy\,dq + y\,ddq = 0$$

quarum integralia inueniri oporteat.

## Solutio.

Posterior aequatio per $y$ multiplicata ob $dt$ constans statim praebet hoc integrale $yydq = \alpha dt$.

Deinde

Deinde prima per $2dy$ posterior vero per $2ydq$ multiplicata summam dant:

$$2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq + dt^2 . \frac{A dy}{yy} = 0$$

cuius integrale est:

$$dy^2 + yydq^2 = \beta dt^2 + \frac{A dt^2}{y}.$$

Cum igitur sit $dq = \frac{\alpha dt}{yy}$ erit

$$dy^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{yy} = \beta dt^2 + \frac{A dt^2}{y}$$

ideoque $ydy = -dt \surd(\beta yy + Ay - \alpha\alpha)$ vnde fit

$$dt = \frac{-ydy}{\surd(\beta yy + Ay - \alpha\alpha)} \quad \text{et} \quad dq = \frac{-\alpha dy}{y\surd(\beta yy + Ay - \alpha\alpha)}$$

Quo autem constantes arbitrarias $\alpha$ et $\beta$ commodius definiamus pro $y$ introducamus angulum $\theta$, vt fit $y = \frac{c}{1 - n \cos.\theta}$ et $dy = \frac{-ncd\theta \sin.\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ et $\beta yy + Ay - \alpha\alpha$ $= \frac{\beta cc + Ac - nAc\cos.\theta - \alpha\alpha + 2n\alpha^2 \cos.\theta - nn\alpha\alpha \cos.\theta^2}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ statuatur $\alpha^2 = \frac{1}{2}Ac$ et $\beta cc + Ac - \alpha\alpha = nn\alpha\alpha$, seu

$$\beta cc + \tfrac{1}{2}Ac = \tfrac{1}{2}nnAc \quad \text{ideoque} \quad \beta = -\frac{A}{2c}(1 - nn)$$

eritque $\beta yy + Ay - \alpha\alpha = \frac{\frac{1}{2}nnAc \sin.\theta^2}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ et $\surd(\beta yy + Ay - \alpha\alpha)$

$$= \frac{n \sin.\theta}{1 - n\cos.\theta} \surd \tfrac{1}{2}Ac.$$

Quibus valoribus substitutis habebimus:

$$dt = \frac{ccd\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2} \surd \frac{2}{Ac} \quad \text{et} \quad dq = d\theta$$

ideoque per nouam variabilem $\theta$ reliquas ita definimus vt fit:

$$q = f + \theta; \; y = \frac{c}{1 - n\cos.\theta} \quad \text{et} \quad dt = \frac{d\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2} \surd \frac{2}{A} c^3.$$

Coroll.

## Coroll. 1.

23. Eodem modo etiam superiores aequationes motum solis continentes construentur:

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A+B}{xx} = 0 \quad \text{et} \quad 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

si enim breuitatis gratia ponamus $A + B = E$ erit

$$p = e + \eta;\; x = \frac{a}{1 - m\,\mathrm{cos}.\eta};\; dt = \frac{d\eta}{(1 - m\,\mathrm{cos}.\eta)^2} \sqrt{\frac{2}{E}a^3}.$$

Cum autem vtrinque elementum temporis $dt$ sit idem, erit

$$\frac{d\theta}{(1 - n\,\mathrm{cos}.\theta)^2} \sqrt{\frac{2}{A}c^3} = \frac{d\eta}{(1 - m\,\mathrm{cos}.\eta)^2} \sqrt{\frac{2}{E}a^3}.$$

## Coroll. 2.

24. Si nolimus nouam variabilem introducere, quoniam inuenimus, $\alpha\alpha = \frac{1}{2}Ac$ et $\mathfrak{C} = -\frac{A}{2c}(1 - nn)$, erit $\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)} = \sqrt{\frac{A}{2c}(-cc + 2cy - yy + nnyy)}$ $= \sqrt{\frac{A}{2c}((1+n)y - c)(c - (1-n)y)}$, sicque habebimus

$$dt = \frac{-y\,dy\sqrt{2c}}{\sqrt{A((1+n)y - c)(c - (1-n)y)}} \quad \text{et} \quad dq = \frac{-c\,dy}{y\sqrt{((1+n)y - c)(c - (1-n)y)}}$$

quae formulae ita ad ellipsin sunt accommodatae, vt $\frac{c}{1-n}$ denotet distantiam apogei, et $\frac{c}{1+n}$ distantiam perigei, vnde distantia media est $\frac{c}{1-nn}$, excentricitas $= n$, et $c$ semiparameter.

## Coroll. 3.

25. Simili modo pro motu solis, nullam nouam variabilem introducendo habebimus has formulas:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x - a)(a - (1-m)x)}} \quad \text{et} \quad dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)x - a)(a - (1-m)x)}}$$


vbi

vbi ſignum — praefixi, vt motus ab apogeo computetur.

## Coroll. 4.

26. Sin autem nouam variabilem vtpote angulum $\theta$ introducere velimus, id etiam infinitis aliis modis fieri poteſt. Veluti ſi ponamus $y = \frac{c(1+\nu\cos.\theta)}{1-n\cos.\theta}$, reperiemus:

$$dt = \frac{d\theta(1+\nu\cos.\theta)}{(1-n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{A}(1+n\nu)c^3} \text{ et } dq = \frac{d\theta}{1+\nu\cos.\theta}\sqrt{(1-\nu\nu)}$$

vbi diſtantia apogei eſt $= \frac{c(1+\nu)}{1-n}$; diſtantia perigei $= \frac{c(1-\nu)}{1+n}$ diſtantia media $= \frac{c(1+n\nu)}{1-nn}$, et excentricitas $= \frac{n+\nu}{1+n\nu}$, tum vero ſemiaxis coniugatus $= c\sqrt{\frac{1-\nu\nu}{1-nn}}$, et ſemiparameter $= \frac{c(1-\nu\nu)}{1+n\nu}$.

## Problema 3.

27. Si propoſitae ſint ſequentes aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

exiſtente $s = q - p$ et

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2.\frac{E}{xx} = 0 \text{ et } 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

earum integralia inuenire.

Solutio.

## Solutio.

Pro relatione quantitatum $x$ et $p$ ad tempus $t$ iam inuenimus:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}$$

qui valores in ipsis propositis aequationibus sunt adhibendi. Quod autem ad has ipsas aequationes attinet, recordandum est iis designari eiusmodi motum corporis C, qui ad punctum B relatus futurus esset regularis. Ducta ergo $Bb$ axi ♈ ♎ parallela si ponamus angulum $CBb = u$, ob $BC = v = \sqrt{(xx + yy - 2xy\,\text{cos.}\,s)}$ habebimus pro hoc motu istas aequationes:

$$dt = \frac{-v\,dv\sqrt{2b}}{\sqrt{B((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} \text{ et } du = \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$$

At est $\text{fin.}\,u = \frac{x\,\text{fin.}\,p - y\,\text{fin.}\,q}{v}$ et $\text{cof.}\,u = \frac{x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q}{v}$.

Atque hinc elicitur:

$$du = \frac{xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\,\text{fin.}\,s - xy(dp + dq)\,\text{cof.}\,s}{vv}$$

vnde nanciscimur:

$$xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\,\text{fin.}\,s - xy(dp + dq)\,\text{cof.}\,s$$
$$= \frac{-b\,v\,dv}{\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = dt\sqrt{\tfrac{1}{2}Bb}.$$

Cum igitur primo $x$ et $p$ deinde etiam $v$ detur per $t$, ista aequatio $xx - 2xy\,\text{cof.}\,s + yy = vv$, cum hac coniuncta determinabit duas reliquas quantitates incognitas $y$ et $q$. Verum definito $v$ per $t$, ex eo primum quaeratur angulus $u = CBb$, quo inuento ob $x\,\text{fin.}\,p - y\,\text{fin.}\,q = v\,\text{fin.}\,u$ et $x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q = v\,\text{cof.}\,u$ erit

erit $\text{tang.}\, q = \frac{x \sin. p - v \sin. u}{x \cos. p - v \cos. u}$; et $y = \sqrt{(xx + vv - 2xv \cos.(p-u))}$. Verum inuenimus esse $u = \int \frac{-b\, dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$, et angulus $q$ etiam facilius ex hac forma, $\text{tang.}(q-p) = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v\cos.(p-u)}$ erui potest, eritque idcirco

$$\text{tang.}\, s = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v\cos.(p-u)} \text{ seu } \sin.\, s = \frac{v \sin.(p-u)}{y}.$$

## Coroll. 1.

28. Pro aequationibus ergo differentio-differentialibus propositis hanc nacti sumus resolutionem. Primo ad datum tempus $t$ quaerantur valores $x$ et $p$ per has formulas:

$$dt = \frac{-x\, dx \sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\, dx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}.$$

Deinde ad idem tempus colligatur valor ipsius $v$ per hanc formulam

$$dt = \frac{-v\, dv \sqrt{2b}}{\sqrt{B((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$$

quo inuento definiatur porro angulus $u$ vt sit:

$$du = \frac{-b\, dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = \frac{dt}{vv}\sqrt{\tfrac{1}{2}Bb}$$

vnde tandem habebitur $y = \sqrt{(xx+vv-2xv\cos.(p-u))}$ et

$$\text{tang.}\, q = \frac{x\sin.p - v\sin.u}{x\cos.p - v\cos.u} \text{ seu tang.}(q-p) = \text{tang.}\, s = \frac{v\sin.(p-u)}{x - v\cos.(p-u)}.$$

## Coroll. 2.

29. Si igitur proponantur resoluendae hae aequationes latius patentes

ddy

$$ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{yy} + \frac{B(y - x\,\text{cof.}\,s)}{v^3} + \frac{B\,\text{cof.}\,s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\,\text{fin.}\,s}{v^3} - \frac{B\,\text{fin.}\,s}{xx}\right) = 0$$

$$ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{E}{xx} = 0 \quad \text{et} \quad 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

exiftente $vv = xx + yy - 2\,xy\,\text{cof.}\,s$ et $s = q - p$; folutionem iam inuenimus pro binis cafibus extremis altero quo $B = 0$ (in probl. 2.) altero quo $A = 0$ (in probl. 3.).

## Coroll. 3.

30. Ponamus pro cafu $B = 0$ prodiiffe $y = P$ et $q = Q$ pro cafu autem $A = 0$ prodiiffe $y = R$ et $q = S$, ac manifeftum eft folutionem formularum latius patentium, quae fit $y = T$ et $q = V$ ita effe debere comparatam, vt pofito $B = 0$ fiat $T = P$ et $V = Q$, pofito autem $A = 0$ fiat $T = R$ et $V = S$, vnde iam quodammodo folutionis generalis indolem colligere licet.

## Coroll. 4.

31. Solutio autem cafus pofterioris, quo $A = 0$, etfi rei natura confiderata, motuque ad corpus B relato, fit facilis, tamen fi aequationes noftras differentio-differentiales fpectemus, difficillime conftat; quemadmodum folutio inuenta ex iis immediate elicui potuerit. Pofito enim $A = 0$, folutio vix minus recondita videri debet, quam fi non effet $A = 0$.

## Coroll. 5.

32. Pro motu ergo Lunae accurate determinando, atque adeo in genere problemate de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium reſoluendo maximum adiumentum inde merito eſt expectandum, vt caſus ille quo $A=0$, ex ſola contemplatione formularum differentio-differentialium euoluatur. Hoc ſaltem eſt certum, niſi hunc caſum expedire valeamus, multo magis de ſolutione generali eſſe deſperandum.

## Coroll. 6.

33. Cum igitur pro hoc caſu ſolutio, quam a poſteriori concinnauimus conſtet, methodus tantum Analytica idonea et quaſi ſponte ſe offerens deſideratur, cuius ope eadem illa ſolutio a priori ipſas aequationes differentio-differentiales tractando erui queat. Nullum enim eſt dubium, quin eadem methodus pro ſolutione generali minime ſucceſſu ſit caritura.

## Coroll. 7.

34. Quoniam a poſteriori iam valores finitos pro quantitatibus $y$ et $q$ elicuimus, haud abs re erit earum differentialia quoque contemplari; quorum euolutio cum laborem non parum taedioſum requirat, ea hic apponam:

$dq$

$$dq = \frac{vdu(v - x\cos.(p-u)) - (vdx - xdv)\sin.(p-u) + xdp(x - v\cos.(p-u))}{yy}$$

$$ds = \frac{vdu(v - x\cos.(p-u)) - (vdx - xdv)\sin.(p-u) - vdp(v - x\cos.(p-u))}{yy}$$

$$dy = \frac{dx(x - v\cos.(p-u)) + dv(v - x\cos.(p-u)) + xv(dp - du)\sin.(p-u)}{y}$$

vnde componitur :

$$\begin{aligned} dy^2 + yydq^2 = dx^2 + xxdp^2 + dv^2 + vvdu^2 &- 2dxdv\cos.(p-u) \\ &- 2xvdpdu\cos.(p-u) \\ + 2xdvdp\sin.(p-u) &- 2vdxdu\sin.(p-u). \end{aligned}$$

Denique si ex aequatione, qua $v$ per $t$ determinatur, constantes $b$ et $i$ per integrationem ingressae iterum per differentiationem tollantur, prodibit : $d^3v + \frac{3dvddv}{v} + \frac{Bdt^2dv}{2v^3} = 0$, quae propterea aequationibus propositis satisfacere est censenda.

## Scholion.

35. Hae formulae autem, quarum ope ista resolutio aequationum casu $A = 0$, obtineri posset, nimis sunt complicatae, earumque inuentio ipsa nimis recondita, quam vt Analystae occurrere possent. Quo autem inuestigatio directa est difficilior, eo magis in eam inquirendum videtur, quoniam inde procul dubio insignia subsidia ad problema generale expediendum merito expectare licet. Cum autem hoc artificium, quo solutio casus $A = 0$, tam facilis euasit, multo latius pateat, atque ad omnes leges attractionis extendatur, ex contemplatione huius maioris amplitudinis facilius fortasse id, quod quaerimus,

mus, elici poterit; vnde idem Problema latiſſimo ſenſu acceptum ſimili modo reſolui conueniet.

## Problema 4.

36. Si corpora A et C ad corpus B attrahantur in ratione quacunque diſtantiarum ab eo, eaque in eodem plano vtcunque moueantur, definire motum reſpectiuum, quo ambo corpora B et C ſpectatori in A poſito circumferri videbuntur.

## Solutio.

Quia omnia ad ſpectatorem in A poſitum ſunt referenda, ponantur, vt ante, diſtantiae $AB = x$; $AC = y$; $BC = v$; et anguli $\Upsilon AB = p$; $\Upsilon AC = q$ et $BAC = q - p = s$; vt ſit $v = \sqrt{(xx + yy - 2xy \operatorname{cof.} s)}$. Tum ſit vis acceleratrix qua corpus A ad B trahitur $= X$, et ea qua corpus C ad B attrahitur $= V$; eritque pro puncto A quaſi fixo ſpectato, vis acceleratrix

qua B ſollicitatur ſecundum $BA = X$

qua C ſollicitatur ſecundum $CB = V$

qua C ſollicitatur ſecundum $CN = X$.

Hinc ratiocinium ſimili modo quo ſupra inſtituendo obtinebimus ſequentes quatuor aequationes:

$$\text{I. } ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . X = 0. \quad \text{II. } 2dxdp + xddp = 0$$

$$\text{III. } ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \left(\frac{y - x \operatorname{cof.} s}{v} . V + X \operatorname{cof.} s\right) = 0$$

$$\text{IV. } 2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2 . \left(\frac{x \operatorname{fin.} s}{v} . V - X \operatorname{fin.} s\right) = 0.$$

Bina-

Binarum autem priorum ſolutio eſt in promtu, ſecunda enim praebet $xxdp = \alpha dt$, ideoque $dp = \frac{\alpha dt}{xx}$; qui valor in prima ſubditus dat: $ddx - \frac{\alpha\alpha dt^2}{x^3} + \frac{1}{2}Xdt^2 = 0$, qui per $2dx$ multiplicatus pro integrali habet:

$$dx^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{xx} + dt^2 \int X dx = \mathfrak{E} dt^2$$

vnde fit

$$dt = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(\mathfrak{E}xx - \alpha\alpha - xx\int X dx)}} \text{ et } dp = \frac{-\alpha\,dx}{x\sqrt{(\mathfrak{E}xx - \alpha\alpha - xx\int X dx)}}.$$

Quanquam autem nullus patet modus, quo binae poſteriores aequationes reſolui queant, tamen conſideratio, quod motus corporis C ex B ſpectatus ſit determinabilis, earum ſolutionem largitur, ſi enim ponamus angulum $CBb = u$, ita vt ſit:

$$\text{ſin.}\,u = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - y\,\text{ſin.}\,q}{v}; \quad \text{coſ.}\,u = \frac{x\,\text{coſ.}\,p - y\,\text{coſ.}\,q}{v}$$

$$\text{et tang.}\,q = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - v\,\text{ſin.}\,u}{x\,\text{coſ.}\,p - v\,\text{coſ.}\,u};\ y = \sqrt{(xx + vv - 2xv\,\text{coſ.}(p-u))}$$

$$\text{hincque tang.}\,s = \frac{v\,\text{ſin.}\,(p-u)}{x - v\,\text{coſ.}\,(p-u)} = \text{tang.}\,(q-p)$$

inter $v$, V et $u$ ſimiles habebuntur aequationes, atque inter $x$, X et $p$, ſicque binae poſteriores aequationes aequiualebunt iſtis:

$$ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2.V = 0 \text{ et } 2dvdu + vddu = 0$$

vnde ſequentes valores integrales eliciuntur:

$$dt = \frac{-v\,dv}{\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V dv)}}; \ du = \frac{-\gamma\,dv}{v\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V dv)}}$$

quae ſimul aequationibus III et VI. ſuperioribus ſatisfacere ſunt cenſendae.

## Coroll. 1.

37. Si ex aequatione inter $v$ et $t$ constantes $\delta$ et $\gamma$ per differentiationem tollantur, obtinebitur aequatio differentialis tertii gradus:

$$v d^3 v + 3 dv ddv + \tfrac{1}{2} dt^2 (3 V dv + v dV) = 0$$

quae aequatio facile quoque deducitur ex formulis:

$$ddv - v du^2 + \tfrac{1}{2} V dt^2 = 0 \text{ et } 2 dv du + v ddu = 0$$

nam prior dat $du^2 = \frac{ddv}{v} + \frac{1}{2} dt^2 . \frac{V}{v}$, ideoque differentiando:

$2 du ddu = \frac{d^3 v}{v} - \frac{dv ddv}{vv} + \frac{1}{2} dt^2 . \frac{v dV - V dv}{vv}$, qui valores in altera per $2 du$ multiplicata $4 dv du^2 + 2 v du ddu = 0$ substituti praebent aequationem inuentam.

## Coroll. 2.

38. Haec quidem sunt facilia, sed cardo rei in hoc versatur, vt certa assignetur methodus, cuius ope inuentae formulae differentiales primi gradus, immediate ex quatuor aequationibus primo inventis erui queant. Atque in hoc negotio eximia Analyseos promotio consistere videtur.

## Scholion.

39. Cum autem nulla adhuc pateat via hoc praestandi, ipsa huius defectus commemoratio vtilitate non caritura videtur, qua sagacitas Analystarum incitetur. Quin etiam haud alienum erit problema

blema de tribus corporibus ſe mutuo attrahentibus, in ſenſu latiſſimo euoluere, vt attractio legem diſtantiarum quamcunque ſequatur, ſaepe numero enim calculi compendia et artificia in problematibus generalioribus facilius inueniuntur, quam in ſpecialioribus, quoniam ipſa limitatio non raro impedit, quominus ratio artificiorum, quae adhiberi queant, perſpiciatur.

## Problema 5.

40. Si tria corpora A, B, C ſe mutuo attrahant in ratione quacunque diſtantiarum, eorumque motus in eodem fiat plano, determinare motum reſpectiuum, quo corpora B et C ſpectatori in A poſito circumferri videbuntur.

## Solutio.

Quia hic corporum actio mutua ſpectari debet, eorum maſſae in computum ſunt ducendae. Sint igitur vires acceleratrices, quibus corpus A vrgetur ad $B = BX$, et ad $C = CY$, quae in reliqua corpora translatae ſuppeditabunt cum iis, quibus ea actu ſollicitantur ſequentes vires acceleratrices:

Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = (A+B)X \\ BC \text{ vi} = CV \\ BM \text{ vi} = CY \end{cases}$

 Corpus

Corpus C follicitatur fecundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = (A+C)Y \\ CB \text{ vi} = B\,V \\ CN \text{ vi} = B\,X \end{cases}$

vbi X, Y et V funt eae diftantiarum $AB = x$; $AC = y$ et $BC = v$ functiones, quibus vires attractiuae praeter maffas funt proportionales. Hinc igitur pro motu corporum fequentes aequationes colligentur.

I. $ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2\left((A+B)X + \frac{C(x - y\,\text{cof.}\,s)}{v}V + CY\,\text{cof.}\,s\right) = 0$

II. $2dxdp + xddp + \frac{1}{2}dt^2\left(CY\,\text{fin.}\,s - \frac{Cy\,\text{fin.}\,s}{v}V\right) = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2\left((A+C)Y + B\frac{(y - x\,\text{cof.}\,s)}{v}V + BX\,\text{cof.}\,s\right) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\,\text{fin.}\,s}{v}V - BX\,\text{fin.}\,s\right) = 0$

vbi eft

$$vv = xx + yy - 2xy\,\text{cof.}\,s \text{ et } s = q - p.$$

Verum praeter has aequationes aliae exhiberi poffunt motum pariter in fe continentes, quae oriuntur; fi motus corporum A et C relatiuus, quales fpectatori in B pofito cerneretur, fimili modo euoluatur. Pofito autem angulo $CBb = u$ vt fit

$$\text{fin.}\,u = \frac{x\,\text{fin.}\,p - y\,\text{fin.}\,q}{v} \text{ et cof.}\,u = \frac{x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q}{v}$$

obtinebuntur hae aequationes:

$$ddv - vdu^2 + \frac{1}{2}dt^2\left((B+C)V + \frac{A(v - x\,\text{cof.}\,(p-u))}{y}Y + AX\,\text{cof.}\,(p-u)\right) = 0$$

$$2dvdu + vddu + \frac{1}{2}dt^2\left(AX\,\text{fin.}\,(p-u) - \frac{Ax\,\text{fin.}\,(p-u)}{y}Y\right) = 0$$

*ddx*

$$ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((A+B)X + \frac{C(x - v\,\mathrm{cof.}(p-u)}{y}Y + CV\,\mathrm{cof.}(p-u) = 0$$

$$2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2(\frac{Cv\,\mathrm{fin.}(p-u)}{y}Y - CV\,\mathrm{fin.}(p-u)) = 0$$

quae duae poſtremae cum ſuperiorum I et II conueniunt ob

$$y\,\mathrm{fin.}\,s = v\,\mathrm{fin.}\,(p-u) \text{ et } y\,\mathrm{cof.}\,s = x - v\,\mathrm{cof.}\,(p-u).$$

Quanquam ergo motus corporum per quatuor aequationes tantum determinatur, iis tamen duae hic inuentae commode adiunguntur, quippe quae non parum ad ſolutionem idoneam inueniendam conferre poſſe videntur; ſicque habebimus ſex ſequentes aequationes, quarum autem quaeque quaternae problemati ſoluendo ſufficiunt.

I. $ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((A+B)X + \frac{x - y\,\mathrm{cof.}\,s}{v}CV + CY\,\mathrm{cof.}\,s) = 0$

II. $2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2((CY\,\mathrm{fin.}\,s - \frac{y}{v}.CV\,\mathrm{fin.}\,s) = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((A+C)Y + \frac{y - x\,\mathrm{cof.}\,s}{v}BV + BX\,\mathrm{cof.}\,s) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2(\frac{x}{v}.BV\,\mathrm{fin.}\,s - BX\,\mathrm{fin.}\,s) = 0$

V. $ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((B+C)V + \frac{x - y\,\mathrm{cof.}\,s}{v}AX + \frac{y - x\,\mathrm{cof.}\,s}{v}AY) = 0$

VI. $2dvdu + vddu + \tfrac{1}{2}dt^2(\frac{y}{v}AX\,\mathrm{fin.}\,s - \frac{x}{v}AY\,\mathrm{fin.}\,s) = 0.$

## Coroll. 1.

41. Praeterquam quod eſt $s = q - p$, circa has quantitates notari meretur eſſe $vv = xx + yy - 2xy\,\mathrm{cof.}\,s$, tum vero $v\,\mathrm{fin.}\,u = x\,\mathrm{fin.}\,p - y\,\mathrm{fin.}\,q$ et $v\,\mathrm{cof.}\,u = x\,\mathrm{cof.}\,p - y\,\mathrm{cof.}\,q$; vbi anguli $p$, $q$ et $u$ inclinationes rectarum AB, AC et BC ad rectam fixam ♈♎ denotant.

 Porro

Porro autem est $x : y : v = \sin.(q-u) : \sin.(p-u) : \sin. s$ siue

$$\frac{x}{\sin.(q-u)} = \frac{y}{\sin.(p-u)} = \frac{v}{\sin. s} \text{ et}$$

$$x = y \cos. s + v \cos.(p-u); \quad v = x \cos.(p-u) - y \cos.(q-u); \text{ et}$$
$$y = x \cos. s - v \cos.(q-u).$$

## Coroll. 2.

42. His aequationibus diuersis modis combinandis aliae non incongruae formari possunt; imprimis autem duae sunt notandae combinationes, quae ad aequationes integrabiles deducunt. Prima oritur

$$\text{II. } \tfrac{x}{C} + \text{IV. } \tfrac{y}{B} + \text{VI. } \tfrac{v}{A} \text{ vnde fit}$$

$$\frac{2xdxdp + xxddp}{C} + \frac{2ydydq + yyddq}{B} + \frac{2vdvdu + vvddu}{A} = 0$$

quae integrata dat:

$$\frac{xxdp}{C} + \frac{yydq}{B} + \frac{vvdu}{A} = \alpha dt.$$

## Coroll. 3.

43. In altera omnes sex coniunguntur hoc modo:

$$\text{I. } \tfrac{2dx}{C} + \text{II. } \tfrac{2xdp}{C} + \text{III. } \tfrac{2dy}{B} + \text{IV. } \tfrac{2ydq}{B} + \text{V. } \tfrac{2dv}{A} + \text{VI. } \tfrac{2vdu}{A}$$

vnde emergit:

$$\frac{2dxddx + 2xdxdp^2 + 2xxdpddp}{C} + \frac{2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq}{B}$$
$$+ \frac{2dvddv + 2vdvdu^2 + 2vvduddu}{A} +$$

+

$$dt^2\left\{\begin{array}{l} +\frac{(A+B)}{C}Xdx+\frac{x-y\,\mathrm{cos}.s}{v}V\,dx+Y\,dx\,\mathrm{cos}.s+Y\,x\,dp\,\mathrm{sin}.s-\frac{xy}{v}V\,dp\,\mathrm{sin}.s \\ +\frac{(A+C)}{B}Y\,dy+\frac{y-x\,\mathrm{cos}.s}{v}V\,dy+X\,dy\,\mathrm{cos}.s-X\,y\,dq\,\mathrm{sin}.s+\frac{xv}{v}V\,dq\,\mathrm{sin}.s \\ +\frac{(B+C)}{A}V\,dv+\frac{x-y\,\mathrm{cos}.s}{v}X\,dv+\frac{y-x\,\mathrm{cos}.s}{v}Y\,dv+X\,y\,du\,\mathrm{sin}.s-Y\,x\,du\,\mathrm{sin}.s \end{array}\right\}=0$$

## Coroll. 4.

44. Iam vero eſt $\frac{x-y\,\mathrm{cof}.s}{v}dx+\frac{y-x\,\mathrm{cof}.s}{v}dy+\frac{xyds\,\mathrm{sin}.s}{v}$ $=dv$ et

$$\frac{x-y\,\mathrm{cof}.s}{v}dv+dy\,\mathrm{cof}.s-y(dq+du)\,\mathrm{sin}.s=dx$$

$$\frac{y-x\,\mathrm{cof}.s}{v}dv+dx\,\mathrm{cof}.s+x(dp-du)\,\mathrm{sin}.s=dy$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{dx^2+xxdp^2}{C}+\frac{dy^2+yydq^2}{B}+\frac{dv^2+vvdu^2}{A}$$
$$+(A+B+C)dt^2\left(\frac{\int X\,dx}{C}+\frac{\int Y\,dy}{B}+\frac{\int V\,dv}{A}\right)=0$$

quae aequatio principium conſeruationis virium viuarum in ſe complectitur.

## Coroll. 5.

45. Patet hinc quantae ſint vtilitatis binae aequationes poſtremae V et VI, etiamſi in reliquis iam contineantur. Si enim ſit $A=0$, aequationes quatuor priores nullam idoneam determinationem ſuppeditant; ex illis autem facillime ad datum quodvis tempus tam diſtantia $v$ quam angulus $u$ aſſignantur. Atque hinc merito concludere videor, in inveſtigatione perturbationis motus planetarum ab his poſtremis aequationibus non exiguum fructum iure ſpera-

ſperari poſſe, qui iis neglectis vix ac ne vix quidem obtineri queat.

## Scholion.

46. Quoniam igitur vidimus, motum lunae, ſi terrae eſſet valde vicina nullo labore definiri poſſe, dum is ad terram referatur, ſin autem luna multo magis a terra diſtaret, vt planetis principalibus eſſet accenſenda, tum eius motum ad ſolem referri conuenire; hinc concludendum videtur pro caſu, quo lunae motus vtriusque naturae eſt particeps, quemadmodum re vera vſu venit, tum eum forte facillime definitum iri ſi neque ad ſolem neque ad terram, ſed ad aliud quodpiam punctum medium certa ratione motum referatur. Hunc in finem ſequens problema adiicio, in quo generatim motum corporis ad datum punctum relatum ad aliud punctum vtcunque motum referre docebo.

## Problema 6.

Tab. II. Fig. 2. 47. Motum corporis C ad punctum A relatum, ad aliud punctum O, quod reſpectu puncti A vtcunque moueatur, ita referre, vt is qualis ſpectatori in O conſtituto ſit appariturus, definiatur.

## Solutio.

Poſita diſtantia $AC = y$ et angulo $\Upsilon AC = q$, binae habentur aequationes differentio-differentiales, quibus

quibus ad quoduis tempus $t$ valores $y$ et $q$ definiuntur, hasque aequationes ita comparatas esse vidimus:

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + M dt^2 = 0 \quad \text{et} \quad ddy - y dq^2 + N dt^2 = 0$$

quas obseruo ex his formis esse natas:

$$dd.y \operatorname{cos}. q + dt^2 (N \operatorname{cos}. q - M \operatorname{fin}. q) = 0$$

$$dd.y \operatorname{fin}. q + dt^2 (N \operatorname{fin}. q + M \operatorname{cos}. q) = 0.$$

Iam pro motu puncti O statuamus distantiam $AO = m$ et angulum $\Upsilon AO = n$; pro dato scilicet tempore $t$, atque vt motum corporis C ad hoc punctum referamus, vocemus distantiam $OC = z$ et angulum $\Upsilon OC = w$. Cum igitur sit $y \operatorname{cos}. q = m \operatorname{cos}. n + z \operatorname{cos}. w$ et $y \operatorname{fin}. q = m \operatorname{fin}. n + z \operatorname{fin}. w$, his valoribus ibi substitutis habebimus: has duas aequationes.

$$\text{I}^\circ.\ + (ddm - mdn^2) \operatorname{cos}. n - (2 dmdn + mddn) \operatorname{fin}. n + dt^2 (N \operatorname{cos}. q - M \operatorname{fin}. q) = 0$$
$$+ (ddz - zdw^2) \operatorname{cos}. w - (2 dzdw + zddw) \operatorname{fin}. w$$

$$\text{II}^\circ.\ + (ddm - mdn^2) \operatorname{fin}. n + (2 dmdn + mddn) \operatorname{cos}. n + dt^2 (N \operatorname{fin}. q + M \operatorname{cos}. q) = 0$$
$$+ (ddz - zdw^2) \operatorname{fin}. w + (2 dzdw + zddw) \operatorname{cos}. w$$

vnde combinatio I. $\operatorname{cos}. w$ + II. $\operatorname{fin}. w$ praebet

$$ddz - zdw^2 + (ddm - mdn^2) \operatorname{cos}. (w - n) + (2 dmdn + mddn) \operatorname{fin}. (w - n)$$
$$+ dt^2 (N \operatorname{cos}. (w - q) + M \operatorname{fin}. (w - q)) = 0$$

haec vero combinatio II. $\operatorname{cos}. w$ — I. $\operatorname{fin}. w$ dat:

$$2 dzdw + zddw - (ddm - mdn^2) \operatorname{fin}. (w - n) + (2 dmdn + mddn) \operatorname{cos}. (w - n)$$
$$+ dt^2 (M \operatorname{cos}. (w - q) - N \operatorname{fin}. (w - q)) = 0$$

 sicque

sicque pro corporis C motu quaesito respectu puncti O ad quoduis tempus $t$ his binis aequationibus tam distantia $OC = z$ quam angulus $\Upsilon OC = w$ definitur. Tum vero quia nunc elementa $AC = y$ et $\Upsilon AC = q$ ex calculo elidi debent, in triangulo ACO notandum, esse angulos:

$$AOV = w - n;\ OAC = q - n;\ \text{et}\ ACO = w - q;$$

hincque $yy = mm + zz + 2mz \cos.(w-n)$ atque

$$\text{tang.}(w-q) = \frac{m \sin.(w-n)}{z + m \cos.(w-n)}$$

vnde colligitur:

$$\sin.(w-q) = \frac{m \sin.(w-n)}{y} \quad \text{et} \quad \cos.(w-q) = \frac{z + m \cos.(w-n)}{y}$$

simili modo ob $\text{tang.}(q-n) = \frac{z \sin.(w-n)}{m + z \cos.(w-n)}$ erit

$$\sin.(q-n) = \frac{z \sin.(w-n)}{y} \quad \text{et} \quad \cos.(q-n) = \frac{m + z \cos.(w-n)}{y}.$$

## Coroll. 1.

48. Cum ergo ante ad quoduis tempus $t$ definiri debuerint quantitates $y$ et $q$, nunc motus cognitio perducta est ad determinationem quantitatum $z$ et $w$, vbi quantitates $m$ et $n$ arbitrio nostro relinquuntur.

## Coroll. 2.

49. Totum igitur negotium eo reuocatur, quemadmodum quantitates $m$ et $n$ pro quouis tempore $t$ assumi oporteat, vt inuestigatio quantitatum $z$ et $w$ facillima reddatur. His enim inuentis quantitates

titates $y$ et $q$, motum corporis C ex A viſum declarantes, inde facile colliguntur.

## Scholion.

50. Operae igitur pretium erit hanc methodum ad motum lunae accommodare, vt pateat, an quicquam lucri inde expectari queat? Facile autem intelligitur punctum O in ipſa recta AB centra ſolis et terrae iungente aſſumi conuenire, quia alioquin nimis magna linearum et angulorum multitudo calculum non mediocriter perturbaret. Poſitis ergo vt ſupra trium corporum maſſis A, B, C, diſtantiis $AB = x$, $AC = y$, $BC = v$, quarum functiones X, Y et V rationem virium in his diſtantiis exertarum exprimant, et angulis $\Upsilon AB = p$ $\Upsilon AC = q$, $BAC = q - p = s$, vt ſit $v = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. s)}$ in ſequente problemate in motum corporis C, quemadmodum ſpectatori in O poſito ſit appariturus, inquiram; vbi quidem vocata diſtantia $AO = m$, angulus $ACO = n$ ipſi $\Upsilon AB = p$ aequalis eſt ſtatuendus.

## Problema 7.

51. Dum terna corpora A, B, C ſe mutuo in ratione quacunque diſtantiarum attrahunt, motum corporis C reſpectu puncti O perpetuo in recta AB vtcunque aſſumto, definire.

 Solutio.

## Solutio.

Primum ergo tam diſtantiam $AC = y$ quam angulum $\Upsilon AC = q$ ex calculo eliminari oportet; per noua elementa $OC = z$ et $\Upsilon OC = w$ ob punctum O introducta; vbi quidem vidimus ob $n = p$, et $q - n = q - p = s$ eſſe:

$$yy = mm + zz + 2mz \operatorname{cof.}(w - p) \text{ et}$$

$$\operatorname{fin.}(w - q) = \frac{m \operatorname{fin.}(w - p)}{y}, \quad \operatorname{cof.}(w - q) = \frac{z + m \operatorname{cof.}(w - p)}{y}$$

$$\operatorname{fin.} s = \frac{z \operatorname{fin.}(w - p)}{y}, \quad \operatorname{cof.} s = \frac{m + z \operatorname{cof.}(w - p)}{y}.$$

Porro cum ſit $OC = z$, $OB = x - m$ et $BOC = w - p$, erit $BC = v = \sqrt{((x - m)^2 + zz - 2(x - m)z \operatorname{cof.}(w - p))}$ tum vero $\frac{x - y \operatorname{cof.} s}{v} = \frac{x - m - z \operatorname{cof.}(w - p)}{v}$ et

$$y - x \operatorname{cof.} s = \frac{yy - mx - xz \operatorname{cof.}(w - p)}{y} = \frac{zz - m(x - m) - z(x - 2m) \operatorname{cof.}(w - p)}{y}.$$

His ſubſtitutis primo pro elementis $x$ et $p$ has habebimus aequationes:

$$ddx - x dp^2 + \tfrac{1}{2}(A + B) X dt^2 + \tfrac{1}{2} C dt^2 \left(\frac{x - m - z \operatorname{cof.}(w - p)}{v} V + \frac{m + z \operatorname{cof.}(w - p)}{y} Y\right) = 0$$

$$2 dx dp + x ddp + \tfrac{1}{2} C dt^2 \left(\frac{z \operatorname{fin.}(w - p)}{y} Y - \frac{z \operatorname{fin.}(w - p)}{v} V\right) = 0.$$

Deinde cum in problemate praecedente poſuerimus:

$$ddy - y dq^2 + N dt^2 = 0 \text{ et } 2 dy dq + y ddq + M dt^2 = 0$$

erit comparatione facta:

$$N = \tfrac{1}{2}(A + C) Y + \tfrac{1}{2} B \left(\frac{zz - m(x - m) - z(x - 2m) \operatorname{cof.}(w - p)}{yv} V + \frac{m + z \operatorname{cof.}(w - p)}{y} X\right)$$

$$M = \tfrac{1}{2} B \left(\frac{xz \operatorname{fin.}(w - p)}{yv} V - \frac{z \operatorname{fin.}(w - p)}{y} X\right)$$

ſupereſt

ſupereſt ergo vt colligamus hinc iſtos valores: Primo

$$N \operatorname{cof.}(w-q) + M \operatorname{fin.}(w-p) = \frac{N(z+m\operatorname{cof.}(w-p)) + Mm\operatorname{fin.}(w-p)}{y}$$

$$= \frac{(A+C)(z+m\operatorname{cof.}(w-p))}{2y} Y + \tfrac{1}{2} B(z-(x-m)\operatorname{cof.}(w-p))\frac{V}{v} + \tfrac{1}{2} B \operatorname{cof.}(w-p). X$$

deinde

$$M \operatorname{cof.}(w-q) - N \operatorname{fin.}(w-p) = \frac{M(z+m\operatorname{cof.}(w-p)) - Nm\operatorname{fin.}(w-p)}{y}$$

$$= -\frac{(A+C)m\operatorname{fin.}(w-p)}{2y} Y + \tfrac{1}{2} B(x-m)\operatorname{fin.}(w-p). \frac{V}{v} - \tfrac{1}{2} B \operatorname{fin.}(w-p). X.$$

Quocirca pro motu corporis C, quatenus ad punctum O refertur et variabilibus $z$ et $w$ definitur, has adipiſcimur aequationes:

$$ddz - zdw^2 + (ddm - mdp^2)\operatorname{cof.}(w-p) + (2dmdp + mddp)\operatorname{fin.}(w-p)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(A+C)\,dt^2\,(z + m\operatorname{cof.}(w-p)).\frac{Y}{y} +$$
$$\tfrac{1}{2} B\,dt^2(z-(x-m)\operatorname{cof.}(w-p)).\frac{V}{v} + \tfrac{1}{2} B dt^2 \operatorname{cof.}(w-p).X = 0$$

$$2dzdw + zddw - (ddm - mdp^2)\operatorname{fin.}(w-p) + (2dmdp + mddp)\operatorname{cof.}(w-p)$$
$$- \tfrac{1}{2}(A+C)dt^2.m\operatorname{fin.}(w-p).\frac{Y}{y} + \tfrac{1}{2} B dt^2.(x-m)\operatorname{fin.}(w-p).\frac{V}{v}$$
$$- \tfrac{1}{2} B\,dt^2 \operatorname{fin.}(w-p). X = 0.$$

## Coroll. 1.

52. Si diſtantia $AO = m$ perpetuo datam teneat rationem ad diſtantiam $AB = x$ vt ſit $m = \alpha x$, erit:

$$yy = \alpha\alpha xx + zz + 2\alpha xz\operatorname{cof.}(w-p) \text{ et}$$
$$vv = (1-\alpha)^2 xx + zz - 2(1-\alpha)xz\operatorname{cof.}(w-p)$$



vnde

vnde patet exiſtente $\alpha = 0$, fore $y = z$, ſin autem ſit $\alpha = 1$, eſſe $v = z$, quemadmodum quidem per ſe eſt manifeſtum.

## Coroll. 2.

53. Sumto autem $m = \alpha x$ erit $ddm - mdp^2 = \alpha(ddx - xdp^2)$ ideoque

$$ddm - mdp^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha(A+B)X dt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C(\alpha x + z\,\mathrm{cof.}(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C((1-\alpha)x - z\,\mathrm{cof.}(w-p))\tfrac{V}{v}dt^2$$

et $2dmdp + mddp = -\tfrac{1}{2}\alpha Cz\,\mathrm{fin.}(w-p).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}\alpha Cz\,\mathrm{fin.}(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2$

qui valores in ſuperioribus aequationibus ſubſtituti praebent

$$ddz - zdw^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\mathrm{cof.}(w-p).X dt^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)(z + \alpha x\,\mathrm{cof.}(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}(B+\alpha C)(z - (1-\alpha)x\,\mathrm{cof.}(w-p)).\tfrac{V}{v}dt^2 = 0$$

$$2dzdw + zddw - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\mathrm{fin.}(w-p).X dt^2 - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)\alpha x\,\mathrm{fin.}(w-p)).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}(B+\alpha C)(1-\alpha)x\,\mathrm{fin.}(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2 = 0.$$

## Coroll. 3.

54. Nunc ergo eſſet videndum, vtrum numero $\alpha$ eiusmodi valor tribui poſſet, vt harum aequationum reſolutio facilior euaderet, quam caſibus $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, vnde vulgo motus lunae inueſtigari ſolet.

Scho-

## Scholion 1.

55. Quanquam de commodis quae hinc forte sperare licet, nihil adhuc pronunciare licet, tamen ex his formulis casus maxime memorabilis deduci potest, quem iam alia occasione euolui. Certum scilicet est lunae initio eiusmodi situm et motum intra terram A et solem B tribui potuisse, vt perpetuo in eadem directione a terra ad solem porrecta fuisset permansura, ideoque soli iugiter coniuncta apparitura. Ad hunc casum inuestigandum, capiamus punctum O in ipso illo lunae loco, ita vt sit $z=0$, ideoque $y=\alpha x$ et $v=(1-\alpha)x$ atque ambae nostrae aequationes inuentae in hanc vnam coalescunt

$$((1-\alpha)B-\alpha A)X+\alpha((1-\alpha)C+A)x.\frac{Y}{y}-(1-\alpha)(B+\alpha C)x.\frac{V}{v}=0.$$

Vnde si ponamus $X=x^{\lambda}$, $Y=y^{\lambda}$ et $V=v^{\lambda}$, vt fiat $\frac{xY}{y}=xy^{\lambda-1}=\alpha^{\lambda-1}x^{\lambda}$ et $\frac{xV}{v}=(1-\alpha)^{\lambda-1}x^{\lambda}$, haec aequatio in istam abit formam:

$$(1-\alpha)B-\alpha A+\alpha^{\lambda}((1-\alpha)C+A)-(1-\alpha)^{\lambda}(B+\alpha C)=0$$

seu $A(\alpha^{\lambda}-\alpha)-B((1-\alpha)^{\lambda}-(1-\alpha))+C(\alpha^{\lambda}(1-\alpha)-\alpha(1-\alpha)^{\lambda})=0$

vel $\alpha A(\alpha^{\lambda-1}-1)-(1-\alpha)B((1-\alpha)^{\lambda-1}-1)+\alpha(1-\alpha)C(\alpha^{\lambda-1}-(1-\alpha)^{\lambda-1})=0$

vnde ex data massarum A, B, C ratione valor fractionis $\alpha$ elici, sicque loca illa lunae, quibus soli perpetuo maneret coniuncta definiri possunt; vbi quidem perspicuum est si esset $\lambda=1$, hoc vbique vsu venire posse.

Scholion

## Scholion 2.

56. Haec speculatio accuratiorem euolutionem meretur, et quia attractio rationem reciprocam duplicatam distantiarum sequitur, posito $\lambda = -2$, habebimus:

$$\frac{A(1-\alpha^3)}{\alpha\alpha} - \frac{B(1-(1-\alpha)^3)}{(1-\alpha)^2} + \frac{C((1-\alpha)^3-\alpha^3)}{\alpha^2(1-\alpha)^2} = 0 \text{ seu}$$

$$A(1-\alpha)^2(1-\alpha^3) - B\alpha\alpha(3\alpha-3\alpha\alpha+\alpha^3) + C(1-3\alpha+3\alpha\alpha-2\alpha^3) = 0$$

quae secundum potestates ipsius $\alpha$ disposita praebet

$$(A+B)\alpha^5 - (2A+3B)\alpha^4 + (A+3B+2C)\alpha^3 - (A+3C)\alpha^2 + (2A+3C)\alpha - A - C = 0$$

vbi si statuamus $\alpha = \frac{1-u}{2}$ fit

$$(A+B)u^5 - (A-B)u^4 - 2(A+B)u^3 + 10(A-B)uu + 17(A+B)u + 7(A-B) = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 8C \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 24C$$

ita vt valor fractionis $\alpha$ a resolutione huius aequationis quinti gradus pendeat. Quodsi bina corpora A et B inter se essent aequalia foret

$$Au^5 - 2Au^3 + 17Au = 0 \text{ hincque vel } u = 0 \text{ et } \alpha = \tfrac{1}{2}$$
$$\qquad\;\; + 4C \quad + 12C$$

vel $uu = \frac{A-2C+\sqrt{(4CC-16AC-16AA)}}{A}$

vnde reliqui pro $u$ valores fiunt imaginarii. Sin autem B repraesentet solem, vt sit quasi $B = \infty$, quia tum $\alpha$ fit minimum proxime erit $(A+3B+2C)\alpha^3 - A - C = 0$ seu $\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}}$ et accuratius

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}} - \frac{3(A+2C)B - C(5A+6C)}{3(A+3B+3C)\sqrt[3]{(A+C)(A+3B+2C)^2}}.$$

## Scholion 3.

57. Iuuabit forſitan ipſi $\alpha$ hunc valorem in genere tribuiſſe, ita vt poſito $X = \frac{1}{xx}$, $Y = \frac{1}{yy}$ et $V = \frac{1}{vv}$ ſit $(1-\alpha)B - \alpha A = \frac{B + \alpha C}{(1-\alpha)^2} - \frac{A - (1-\alpha)C}{\alpha\alpha}$; ſiquidem eum in lunae motum inquirere velimus, qui ad caſum iſtum memorabilem proxime accederet, ita vt diſtantia $z$ prae $\alpha x$ maneret minima. Quia enim tum proxime fit $\frac{1}{y^3} = \frac{1}{\alpha^3 x^3} - \frac{3 z \operatorname{cof.} (w-p)}{\alpha^4 x^4}$ et $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{(1-\alpha)^3 x^3} + \frac{3 z \operatorname{cof.} (w-p)}{(1-\alpha)^4 x^4}$, binae aequationes motum exprimentes ad has formas reducuntur:

$$ddz - z dw^2 + \frac{z(1 - 3\operatorname{cof.}(w-p)^2)}{2x^3} dt^2 \left(\frac{B + \alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A + (1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

$$2dzdw + zddw + \frac{3z \operatorname{fin.}(w-p) \operatorname{cof.}(w-p)}{2x^3} dt^2 \left(\frac{B + \alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A + (1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

quae ſi motus ſolis pro vniformi et diſtantia $x$ pro conſtanti habeatur; ita repraeſentari poterunt:

$$ddz - z dw^2 + \gamma z dp^2 (1 - 3 \operatorname{cof.} (w-p)^2) = 0$$

$$2dzdw + zddw + 3\gamma z dp^2 \operatorname{fin.} (w-p) \operatorname{cof.} (w-p) = 0$$

quae aequationes, cum $z$ vnam dimenſionem non excedat pro ſimplicioribus ſunt habendae.